

Pedro Schwartz¹
Universidad Camilo José
Cela, Madrid, Spain
✉ pschwartz@ucjc.edu

Justice and Welfare. A Critique of Amartya Sen's Welfare Economics¹

Justicia y Bienestar. Una Crítica de la Teoría del Bienestar de Amartya Sen

I. INTRODUCTION

I will start by recounting two tales with which Prof. Sen illustrates his theses about social welfare and social justice.

- o The tale of three children and a flute
- o The tale of Lady Chatterley' lover.

Three undecidable criteria of justice

Imagine a situation where three children, Anna, Robert, and Carla fight over a flute. Anne defends that giving it to her will maximise the utility of the group, since she is the only one who reads music and plays the flute. Robert appeals to the criterion of equality by saying that he is so poor that he does not have single toy to play with. Carla reminds the other two that she made the flute by carving it for weeks. Which one of the three is right?

Unattainable social welfare criteria

In the second tale we find ourselves in a democratic society of two people, in which of course the correct thing is to pay attention to the preferences of the people that compose it. To maximise the welfare in that society we have to decide which of the individuals called Mr. Prude and Mr. Lewd will get the only copy of *Lady Chatterley's Lover* that has escaped the order of the censor to have all copies of the book burnt in the public square. Mr. Prude would prefer that nobody reads it (x), or at worst that only he himself would read it (y) so that the book did not fall in Mr. Lewd's hands (z). Mr. Lewd would prefer to read it himself (z) or if not, he would be amused if Mr. Prude read it (y) rather than that nobody read it (x). This is the order of preference of each of them:

Mr. Prude: $x > y > z$

Mr. Lewd: $z > y > x$



EXECUTIVE SUMMARY

This paper examines some of the consequences of the Arrow Impossibility Theorem for Welfare Economics. Some of these consequences were overlooked by Amartya Sen, however well he taught it in his outstanding courses on "Collective Choice and Social Welfare". The young Ken Arrow had proved in 1950 that a democratic society would find it impossible to apply universally valid criteria of justice or welfare in its decisions, by arguing a contrario that such collective decisions would necessarily lead to dictatorial powers. Only if a dictator imposed those values would that society unanimously work to achieve a state of justice and welfare – a fatal contradiction. Given that impossibility theorem, we should give up all attempts to create happy human societies or evaluate societies with an abstract criterion of justice. It is illogical to speak of the 'common good'. The concept of 'social justice' is empty. Striving for the common good and acting justly are personal virtues applied within institutional frameworks, slowly evolved, or intentionally created such as private property or the separation of powers, that allow us to live in relative harmony. It is thus that we sidestep the impossibility of applying universal criteria philosophically derived from first principles, as Kant, Rousseau, Marx, or Rawls attempted to do.

RESUMEN DEL ARTÍCULO

Este trabajo estudia algunas de las consecuencias del Teorema de Imposibilidad de Arrow para la Teoría Económica del Bienestar pasadas por alto por Amartya Sen, quien tanta importancia ha dado siempre en sus cursos a ese teorema. En 1950, el joven Ken Arrow había demostrado que era imposible que en una sociedad democrática se consiguiera aplicar universal y coherentemente criterios de justicia y bienestar en las decisiones colectivas, aduciendo el argumento a contrario de que tales decisiones sociales desembocarían necesariamente en acuerdos dictatoriales: sólo si un dictador imponía esos valores era posible que la sociedad consiguiera alcanzar de forma unánime la justicia y la felicidad – una fatal contradicción. Visto este teorema de imposibilidad, deberíamos renunciar a todo intento de crear sociedades humanas colectivamente felices o de evaluar en abstracto la justicia de esta o aquella sociedad. Es ilógico hablar de 'bien común'. El concepto de 'justicia social' está vacío. El obrar bien y el ser justos son virtudes personales ejercidas en marcos institucionales lentamente aprendidos o a veces intencionalmente diseñados por la humanidad a lo largo de la historia. Así han ido apareciendo en los grupos humanos instituciones, cual la propiedad privada o la separación de poderes, que nos permiten vivir en relativa armonía, pese a la imposibilidad de aplicar de criterios universales deducidos filosóficamente de primeros principios, como lo hicieran Kant, Rousseau, Bentham o Rawls.

They only agree that Mr. Prude should read it (y). By unanimity (y) prevails, though neither of the two prefers this result. Rejecting (y) would favour one at the expense of the other. This means that they find themselves at a Pareto point, a situation where one participant can only improve by worsening that of the other. Neither participant wants to give up (y). The liberal solution would be that each do as they prefer, possible if there were more than one copy. Prude would prefer to keep the book under wraps and Lewd to read it himself. With only one copy extant those choices would not be 'Paretian' and each would be tempted to impose his choice by force, which is out of bounds. (In fact the book was prohibited in England for thirty two years.) That is why Sen titled his essay "The impossibility of a Paretian Liberal" (1983).

202

Striving for the common good and acting justly are personal virtues applied within institutional frameworks, slowly evolved, or intentionally created such as private property or the separation of powers, that allow us to live in relative harmony

2. ARROW'S IMPOSSIBILITY THEOREM

The point of these two tales is to show the impossibility in a democratic society of applying universal criteria of justice or welfare, free of contradictions and paradoxes. It is not possible to define the common good of an ideal democratic society characterized by minimal conditions; neither is it possible to create a just society that obeys these minimal conditions. Prof. Amartya Sen has accepted this paradox, known as the "Arrow impossibility theorem" (*JPE*, 1950), as the building block of his social welfare theory.

We know how Ken Arrow discovered this impossibility. He was employed by the RAND organization of the US Defense Department. He was asked to apply the theory of games, originally formulated in terms of individuals, to rival groups of individuals, i.e. States. After five days of trying to apply the logic of games to societies he concluded that it was impossible.² States that are minimally democratic cannot

function as individuals, *pace* Henry Kissinger and other devotees of geostrategy.

We could summarize what Sen concludes on this impossibility theorem thus:

- Any principle of social organization attentive to the order of preference of the individuals composing it, looking to be of universal application, to obey the Pareto criterion, and to be independent of any other evaluating criterion, will unavoidably be dictatorial.

That this conjunction of three minimal conditions should necessarily lead a democracy to dictatorship forces one to conclude that the search for the common good in a democratic society is impossible – an unexpected and saddening conclusion.

That great and courteous professor was not beyond using good-natured humor in his classes. He told his students that the best way to remember the four conditions that taken together led to a paradox was to memorize the acronym {stUPID}, U for universal, P for Pareto, I for independent of other traits, D for non-dictatorial. The absence of any of those four conditions would make the desired result unattainable, in other words, would make the desired common good a phantom or a cause of conflict.³

KEYWORDS

Arrow Impossibility Theorem, Social Justice, Social Welfare, Constitutional Unanimity, Free Market.

PALABRAS CLAVE

Imposibilidad de Arrow, Justicia social, Felicidad colectiva, Unanimidad Constitucional, Libre mercado.

2.1. Decision by Majority

A generally accepted idea is that the simplest solution would be to decide the collective criterion by majority vote. (Sen, 1970, ch. 10.) That method faces two difficulties. If the number of voters is small paradoxes of the kind pointed out by the Marquis of Condorcet $\{a > b > c > a\}$ would occur.⁴ However, if the number of voters be large, the decision would tend to converge to the median voter, as Gordon Tullock (1967) pointed out. Relief! Not so.

A second difficulty is of more import. As Sen admits (1970, 10.1) the rule of majority decision leaves too little space for personal liberty as J.S. Mill (1859) defined it and valued it is possible that the rule of the majority would leave too little space for the preferences of the minority, even composed of only two persons. A Society is not liberal if it does not develop “values and preferences that respect each other’s privacy and personal choices”. (Sen, 1970, 6.6). If the society is divided into majority and minority, the concurrence of many voters is reduced to two and the approximation to the mode does not respect individual liberty. Impossibility returns.

2.2. Three Ways of Avoiding Impossibility

Three possible reactions to the destructive effect of an Arrow impossibility will be noted. One is that of proceeding as if nothing had happened and continue the tradition of deriving universal criteria of justice and happiness from some principle of general validity as those we associate with the names of Kant, Rousseau, or Rawls, a doubtful escape route. Another is to avoid the impossibility radically by case by case debate and possible social interventions, as Sen proposes.

The third is to rely on evolved or designed institutions and general rules, as could be those of the competitive market or of unilateral free trade.

Indeed, to avoid these paradoxes Sen proposes to give up way of defining universal rules and analyze possible concrete measures to bring about more justice and happiness. He is content with intuitive justice after comparing the resources, opportunities and 'functionings' as he calls them that actual people enjoy or lack in their everyday lives. For Sen there are no universally just solutions for social problems, where he is right. But from there he jumps to the conclusion that we must set aside institutional rules and concentrate on what we could agree on democratically – a consoling stance but at bottom a demagogic one.⁵ This was the object of a noisy debate between Amartya Sen and Jagdish Bhagwati on the occasion of the 2013 General Election, as the best policy to fight poverty in India. J. Bhagwati with A. Panagariya (2013) defended the search for growth through general rules, especially free trade, rather than the piecemeal policies favored by A. Sen with J. Drèze (2013)

To sidestep the logical contradictions pointed out by Arrow it is not enough to add more information to calculate the general welfare, as would be the intensity of preferences rather than their ordering, thus leaving aside condition I. Nor will we escape the paradox by alleging that Sen presents two unreal examples, because in any social situation there will be rules determining who is the owner of the flute or the book. That is precisely the point, the difficulty of defining exactly the institutional framework in which our three children or two readers find themselves before decision time.

2.3. Logical Planes

How does one escape from those semantic vicious circles that appear in the debates of political philosophy that land one in Arrow Impossibility Theorem? One way of avoiding the Arrow paradox is to separate social decisions onto two planes – as Bertrand Russell proposed for solving other formal logic paradoxes – to wit, by avoiding self-references that are the sources of such paradoxes. In the case of a famous paradox, that of 'The Liar' posed by Eubulides of Miletus, who asserted that: "If the proposition «What I am saying is false» is false, then it is true; and if it is true, then it is false". Russell, as I say, used quotation marks to separate the paradox onto two planes: a meta-plane where we would place the proposition «I am saying»,

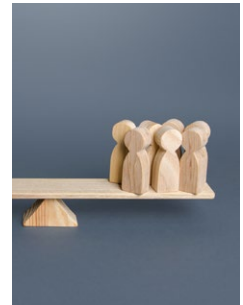


which is the true part; and on a lower plane the proposition «is false» which is the false part of what Eubulides said. This allows us to rephrase the contradictory assertion into «it is true that Eubulides is asserting something false».

2.4. Examples of Buchanan-Tullock Constitutional Rules

Buchanan and Tullock in their (1962) book *The Calculus of Consent*, whose subtitle revealingly is *Logical Foundations of Constitutional Democracy*, applied the separation of political norms onto two planes: the constitutional meta-plane, unanimously agreed previously to any practical decision, and the plane for day-to-day political decisions governed majority voting. This distinction allows avoiding semantic self-references in the world of political decisions.⁶

Since today's liberal Constitutions are a hotchpotch of fundamental and administrative norms it seems impossible to posit that they should be adopted unanimously by citizens in their actual social situations and expectations (not behind a veil of ignorance). Examples of rules considered as (or should be) unanimously accepted in liberal Constitutions are equality before the law, *habeas corpus*, the right of property, the free market, or God help us, free trade – in other words the Bill of Rights.



2.5. The Rule of the Respect of Private Property

The conflict among the three children clears if there obtains a previous constitutional rule of higher import that determines how one acquires and exercises property over goods. If the flute has an owner, he or she can rent it for a fee or even give it away for free. The paradox vanishes.

Equally the Lady Chatterley paradox dissolves if there is a private property constitutional rule established and accepted before anybody even knew of the existence of the book. The rule permits acceptable solutions to be reached in the society though they may appear sub-optimal to a philosopher-king. The respect of private property properly acquired would avoid the temptation to apply dictatorial solutions that could presumably allow social welfare to reach an absolute maximum; neither a Leviathan *à la Hobbes* nor a general will *à la Rousseau* nor redistribution *à la Piketty* need be applied. That solves the paradox and avoids conflict, as pointed out by St. Thomas Aquinas in his defense of private property.

«quia per hoc magis pacificus status hominum conservatur, dum unusquisque re sua contentus est. Unde videmus quod inter eos qui communiter et ex indiviso aliquid possident, frequentius iurgia oriuntur».⁷

Let us suppose that Mr. Lewd has bought that exciting book from one of the *bouquinistes* of the *Quais de la Seine*. Mr. Prude will not be able to impose on Mr. Lewd his preference that he do not read it, however much an abstract and previous analysis could lead us to conclude that social welfare would be greater if the decision were collective and dictatorial and not mercantile. Mr. Prude, who lives in a society that has agreed to respect private property, can try to buy the uncut book from Mr. Lewd. If it is Mr. Prude who purchased the book from a *bouquiniste*, Mr. Lewd will have to retain his inclinations and fail to achieve 'superior' social situation.

The solution of the paradox is based on the constitutional norm that there are proprietors and that both parts respect property rights. The limit to one's liberty is not the liberty of the others (a space with no defined frontiers) but the *property* of the others.

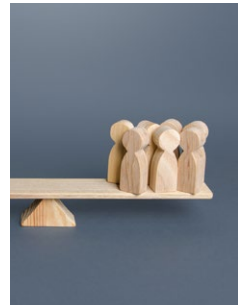
Institutions and rules emerge in the market which solve the paradoxes that would appear in an institution-less society. With the separation of rules onto two planes, constitutional and majoritarian, also frees us from the exclusive reliance on case-by-case democratic examination and discussion, as Sen would. By focusing on concrete unjust situations and examining whether each proposed solution betters social welfare and expands the capacities of the individuals under examination, our interventionists overlook the positive effects of the classical institutions of the free market. If, with Buchanan, we make it a rule that constitutional arrangements must be unanimous, then the free market is the *locus of nemine discrepante* agreements based on the Constitutional rule of respect for private property (since free contracts only concern the two parties that agree). History shows that institutions and rules emerge in the market that solve the paradoxes that would emerge in an ideal society lacking institutions. There are also cases where institutions have been designed and created *ex professo* to avoid paradoxes, so to speak. This what the fathers of the American Constitution of 1785 tried to do to overcome the contradictions of democratic systems with checks and balances, thus avoiding the tendency of democracies to commit suicide by democratic decision.



The general dislike of free markets and free contracts leads to an increase of conflict whose solution becomes political, as happens in the Spanish labor market, for example.

To examine continuously whether each single contract furthers social welfare is, as I say, the typical attitude of a philosopher-king. Under the pretext of being just and showing good will, these *dei ex machina* intervene where nobody has called them. They flood the free market with doubts about its efficiency.⁸ However, the free market has brought about an increase of the number of inhabitants on our Planet Earth, with a prosperity and an equality without parallel. The economist Deirdre McCloskey when she speaks of 'The Great Enrichment' (2022, ch. 6) reckons that Humanity has enjoyed an increase of social income of 5,000 % in the last 200 years. And the great egalitarian philosopher Branko Milanovic in his article "The Great Convergence" (2023) shows the clear reduction in world inequality. The worshippers of perfect competition do not see that constitutional and customary norms have been at the basis of the unbelievable progress of Western civilization in prosperity, equality, and liberty. Those philosophers would do well to reconsider their confusion of justice and uniformity and adhere to the classical definition of justice as recounted by Ulpian:

Give unto each what is theirs,
do not hurt one another,
live honestly.



REFERENCES

- Arrow, Kenneth (19651): "A difficulty in the Concept of Social Welfare", *Journal of Political Economy*, nº. 58, pgs. 328-346.
- J. Bhagwati y A. Panagariya (2013), *Why Growth Matters. How economic growth in India reduced poverty and the lessons for other developing countries*. Public Affairs.
- Buchanan, J. y Tullock, G. (1962): *The Calculus of Consent. Logical Foundations of Constitutional Democracy*. Oxford University Press.
- Drèze, J., y A. Sen (2013): *Uncertain Glory. India and its Contradictions*. Princeton University Press.
- Francisco Álvarez, J. (2010): "La propuesta imanentista de Amartya Sen para la justicia global". *Isegoría*, nº 43, julio-diciembre, págs. 617-630.
- Lawrence, D. H.: *Lady Chatterley's Lover* (1928), publicado privadamente en 1928 y públicamente por Penguin Books en 1960.
- Maskin, E. y Sen, A. (2004):, Eric and Sen, Amartya (2004): *The Arrow impossibility Problem*. Kenneth J. Arrow Lecture Series. Columbia University Press. Kiddle edition.

McCloskey N. (2022): *Beyond Positivism, Behaviorism, and Neoinstitutionalism in Economics*. University of Chicago Press.

Milanovic, B. (2023): "The Great Convergence", *Foreign Affairs*, July-August 2023, págs. 78-91, Gráfico 1.

Mill, J.S. (1859): *On Liberty*. Vol. XVIII of the *Collected Works of -*. University of Toronto Press.

Nasar, S. (1994): *A Beautiful Mind* (Biografía de John Nash). Simon and Schuster, New York.

Sen, A. (1970): *Collective Choice and Social Welfare*. Oliver and Boyd.

Sen, A. (1983): "The Impossibility of a Paretian Liberal". *Journal of Political Economy* 78 (1) Traducido en J. Casas compilador, *La nueva economía del bienestar*, 1995.

Sen, A. (2003): *The Idea of Justice*. Penguin Books.

Sen, A. (2021): *Home in the World. A Memoir*. Allen Lane.

Sen, A. (2014): "Arrow and the Impossibility Theorem", en Maskin y Sen.

Tullock, G. (1967): "The General Irrelevance of the Impossibility Theorem", *Quarterly Journal of Economics*, vol. 81, nr. 2, págs. 256-270.

Vallet de Goytisolo, J. (1974): "La propiedad en Santo Tomás de Aquino", nota 70. Revista *Verbo*. Fundación S. Peiró.

Vanberg, V. J. (2019): *Individual Choice and Social Welfare: Theoretical Foundations of Political Economy*. A Research Literature Review. Edward Elgar. Cheltenham.



NOTES

1. Amartya Sen: *The Idea of Justice* (2009), págs. 12-13. This book is perhaps the most relevant for the present critique. One could add *Home in the World* (2021), the self-portrait of a thinker moved by his love of science and his care for the underprivileged. I was lucky enough to follow a full course given by Prof. Amartya Sen at the London School of Economics in 1972-73, the basis of the critical remarks I expound in this essay. The textbook was *Collective Choice and Social Welfare* (1970).
2. Sylvia Nasar: *Biography of John Nash*, 1998, pg. 108.
3. A formal demonstration of this result can be found in Sen's chapter "Arrow and the Impossibility Theorem", in Maskin and Sen, Universidad de Columbia (2014). It can also be found in the Appendix of the present article.
4. See Appendix 1.
5. This is what J. Francisco Alvarez (2010) calls "Sen's immanentist approach to global justice".
6. V. Vanberg (2019) gives an excellent review of Buchanan's theory of Constitutional welfare economics, in contrast with utilitarian and preference welfare economics.
7. "By it [private property] the pacific state of men is preserved, as long as everybody is content with his goods. For we see that among those who possess something in common and undividedly, many conflicts arise." Juan Vallet de Goytisolo (1974): "La propiedad en santo Tomás de Aquino" note 70.
8. Of course, our interventionists will untiringly point at market imperfections to claim that free contracts must be examined for their distance from equilibrium. McCloskey (2022, págs. 37-40) has much to say on the 108 unmeasured imperfections she culls from the writings of mainstream economists.

APPENDIX

Appendix 1

The paradox of the majority vote according to the Marquis of Condorcet

Suppose a society of three members expressing the following preferences for social organization, to be decided by majority vote.

	FIRST PREFERENCE	SECOND PREFERENCE	THIRD PREFERENCE
Voter 1	A	B	C
Voter 2	B	C	A
Voter 3	C	A	B

Most voters prefer A to B, and B to C, but also C to A. The result is cyclical and without final resolution. $\{A > B < C < A\}$. The cycle tends to disappear as the number of voters increases (G. Tullock, 1967).

Appendix 2

A proof of the Arrow impossibility theorem by Amartya Sen, as reformulated by PSG

A Social Welfare Function (SWF):

- whose domain is unrestricted, i.e., of universal character;
- is independent of any other SWF;
- and obeys the Pareto condition that the individuals concerned have no incentive to change their position;

must be a dictatorship.

$\{U + P+\} \rightarrow D$

The question concerns individual preferences on alternative social states, not personal satisfactions derived from personal functionings, conditioned by the minimal characteristics detailed at the beginning, though they result in being individualistic and also needing a dictator.

Decisive Group

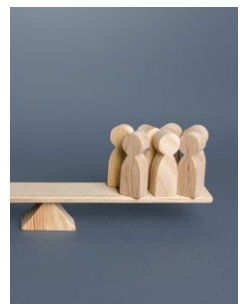
Let us assume that the society can take four possible states (a,b,x,y), there being a finite number of individuals. In that society there is a group G graced with the faculty of deciding what they will wear to sleep, with nobody able to oppose it: they decide on a shocking pink pajama with a palm tree embroidered on the back. As to the society as a whole, nobody knows what choice will be decided for the rest.

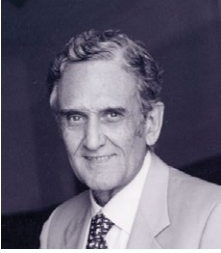
Now let us link the two postulates: the general preference of the whole society for a better than b; and the particular preference of group G for x better than y. The conclusion is that the order of preference of group G is (a < x < y < b). By strict transitivity this order must be applied to the whole of society. The nucleus of these preferences (x of society. The nucleus of these preferences (x > y) governs the complete series. So that group G is decisive for the four preferences and is of universal application (U) to all members, who in any case will not want to give up their Pareto-optimal situation (P).

Progressive reduction of decisive groups

If group G is decisive there will be a small part of it that will be decisive and group G2 that is not decisive. Let us assume that minigroup G1 prefers a better than b (the pink pajama with a palm tree better than any other).

Therefore, G1 is decisive for the whole of society (U). The same happens with another smaller group G3. Decidability slips until G* comprises a single individual, that is to say, a dictator. Quod erat demonstrandum.





Pedro Schwartz¹
Universidad Camilo José
Cela, Madrid, Spain
✉ pschwartz@ucjc.edu

Justicia y Bienestar. Una crítica de la Teoría de Bienestar de Amartya Sen¹

Justice and Welfare. A Critique of Amartya Sen's Welfare Economics

I. INTRODUCCIÓN

Voy a contarles dos cuentos que solía relatarnos el Prof. Amartya Sen en las clases a las que con tanto provecho pude asistir:

- o El cuento de los tres niños y la flauta
- o El cuento del amante de lady Chatterley.

Tres criterios de justicia indecibles

Imaginen una situación en la que tres niños, Ana, Roberto y Carla, se pelean por una flauta. Ana defiende que maximizará la utilidad del grupo, pues es la única que sabe música y tocar la flauta. Roberto apela al criterio de igualdad diciendo que es tan pobre que no tiene ni un solo juguete que sea suyo. Carla recuerda a los otros dos niños que ella construido la flauta tallando durante semanas. ¿Quién de los tres tiene razón?²

Cálculos de bienestar social inalcanzables

En el segundo cuento, nos hallamos en una sociedad democrática de dos individuos, en la que, por descontado, se considera que lo correcto es atender a las preferencias de las personas que la componen. Con el fin de maximizar el bienestar de la sociedad en cuestión, hay que decidir a cuál de los individuos, llamados don Puritano y don Libertino, hay atribuir el único ejemplar de *Lady Chatterley's Lover* que ha escapado a la orden del Juez de Imprenta de quemarlos todos en la plaza pública. Don Puritano preferiría que no lo leyera nadie (x), o puestos en lo peor, leerlo solo él (y) para que no caiga en las manos de don Libertino (z). En cambio, don Libertino preferiría leerlo él (z) o si no, le divertiría que lo leyera don Puritano (y), mejor que el que no lo leyera nadie (x). Este es el orden de preferencias de cada uno de ellos:

Don Puritano: $x > y > z$

Don Libertino: $z > y > x$



RESUMEN DEL ARTÍCULO

Este trabajo estudia algunas de las consecuencias del Teorema de Imposibilidad de Arrow para la Teoría Económica del Bienestar pasadas por alto por Amartya Sen, quien tanta importancia ha dado siempre en sus cursos a ese teorema. En 1950, el joven Ken Arrow había demostrado que era imposible que en una sociedad democrática se consiguiera aplicar universal y coherentemente criterios de justicia y bienestar en las decisiones colectivas, aduciendo el argumento a contrario de que tales decisiones sociales desembocarían necesariamente en acuerdos dictatoriales: sólo si un dictador imponía esos valores era posible que la sociedad consiguiera alcanzar de forma unánime la justicia y la felicidad – una fatal contradicción. Visto este teorema de imposibilidad, deberíamos renunciar a todo intento de crear sociedades humanas colectivamente felices o de evaluar en abstracto la justicia de esta o aquella sociedad. Es ilógico hablar de ‘bien común’. El concepto de ‘justicia social’ está vacío. El obrar bien y el ser justos son virtudes personales ejercidas en marcos institucionales lentamente aprendidos o a veces intencionalmente diseñados por la humanidad a lo largo de la historia. Así han ido apareciendo en los grupos humanos instituciones, cual la propiedad privada o la separación de poderes, que nos permiten vivir en relativa armonía, pese a la imposibilidad de aplicar de criterios universales deducidos filosóficamente de primeros principios, como lo hicieran Kant, Rousseau, Bentham o Rawls.

EXECUTIVE SUMMARY

This paper examines some of the consequences of the Arrow Impossibility Theorem for Welfare Economics. Some of these consequences were overlooked by Amartya Sen, however well he taught it in his outstanding courses on “Collective Choice and Social Welfare”. The young Ken Arrow had proved in 1950 that a democratic society would find it impossible to apply universally valid criteria of justice or welfare in its decisions, by arguing a contrario that such collective decisions would necessarily lead to dictatorial powers. Only if a dictator imposed those values would that society unanimously work to achieve a state of justice and welfare – a fatal contradiction. Given that impossibility theorem, we should give up all attempts to create happy human societies or evaluate societies with an abstract criterion of justice. It is illogical to speak of the ‘common good’. The concept of ‘social justice’ is empty. Striving for the common good and acting justly are personal virtues applied within institutional frameworks, slowly evolved, or intentionally created such as private property or the separation of powers, that allow us to live in relative harmony. It is thus that we sidestep the impossibility of applying universal criteria philosophically derived from first principles, as Kant, Rousseau, Marx, or Rawls attempted to do.

En lo único en lo que hay acuerdo es que en que se aplique y (que lo lea don Puritano). Vence y por unanimidad, a pesar de que no prefieran ese resultado ninguno de los dos. Lo liberal sería que cada uno hiciese lo que prefiriera, don Puritano x (que no lo leyera nadie), y don Libertino z (que lo leyera él). Sin embargo, eso no sería 'paretiano'. El rechazar y mejoraría al uno a costa de empeorar al otro; se encuentran, pues, en un punto de 'óptimo de Pareto', que son situaciones en las que un partícipe no puede mejorar sin empeorar a otro. El resultado es que, sin haberlo elegido nadie, ninguno quiere abandonar y. Cada miembro de dicha sociedad sentirá la tentación de imponer su criterio por la fuerza, como de hecho ocurrió al estar prohibido en Inglaterra durante treinta y dos años. Sen tituló su ensayo "Lo imposible de ser un liberal paretiano".³

Así han ido apareciendo en los grupos humanos instituciones, cual la propiedad privada o la separación de poderes, que nos permiten vivir en relativa armonía,...

2. EL TEOREMA DE IMPOSIBILIDAD DE ARROW

Estos dos cuentos tienen por objeto señalar la imposibilidad en una sociedad democrática de aplicar criterios universales de justicia o de bienestar sin caer en contradicciones y paradojas. No es posible definir el bien común de una sociedad democrática caracterizada por unas condiciones mínimas, aunque sean muy poco exigentes, ni tampoco crear una sociedad justa que cumpla esas levísimas condiciones. El Prof. Amartya Sen fue quien me enseñó la existencia de esas imposibilidades, recogidas bajo el nombre de "Teorema de imposibilidad de Arrow" (*JPE* 1950).

Se sabe cómo, en 1948, se topó Ken Arrow con esa imposibilidad. Estaba empleado en la organización RAND del Ministerio de Defensa de los EE. UU. Le pidieron que aplicara la teoría de juegos, ideada en términos de individuos, a grupos rivales de individuos, es decir, a Estados. Tras cinco días de analizar la cuestión matemáticamente, se convenció de que eso era imposible.⁴ Los Estados, al menos si eran democráticos, no podían funcionar como individuos, *pace* Henry Kissinger y demás devotos de la geoestrategia.

Podríamos resumir lo que recoge Sen de este teorema de la manera siguiente:

- cualquier principio de organización social que, atendiendo al orden preferencias de los individuos que la componen, busque ser de aplicación universal, obedecer la regla de Pareto, y mantenerse independiente de cualquier otro criterio de organización, no podrá evitar el ser dictatorial.

El que esa conjunción de tres mínimas condiciones desemboque lógicamente en una dictadura lleva a concluir que la búsqueda del bien común en cualquier sociedad democrática es imposible – un resultado sorprendente y entristecedor.

En sus clases nos sugería Sen que memorizáramos la imposibilidad de reunir esas cuatro condiciones mínimas sin caer en contradicción, con el acrónimo (estÚPIDo), una ironía de ese grande y cortés profesor: la U de universal; la P de Pareto; la I de independencia; la D de no-dictatorial – el fallo de una de esas cuatro condiciones, repito, hacía inalcanzable e incluso imposible el ideal del bien *común*. En cualquier sociedad es ilógico pretender el bien común, ni siquiera bajo condiciones tan leves como esas cuatro.⁵

El problema consiste en saber cómo pueden aplicar los miembros de una sociedad reglas universales para reflejar sus preferencias. Arrow nos ha dicho que, si eligen una regla UPI, surgirá una paradoja o un círculo sin fin y habrá de imponerla un dictador.

PALABRAS CLAVE

Imposibilidad de Arrow, Justicia social, Felicidad colectiva, Unanimidad Constitucional, Libre mercado.

KEYWORDS

Arrow Impossibility Theorem, Social Justice, Social Welfare, Constitutional Unanimity, Free Market.

2.1. Decisión por Mayoría

Es opinión muy difundida que el camino más expedito para tomar tales decisiones de consuno es la de hacerlo por mayoría. (Sen, 1970, cap. 10). Tal método o camino tiene dos inconvenientes. Si los votantes son pocos, aparecerán contradicciones, círculos o paradojas del tipo de $\{a > b > c > a\}$, que ya señaló el marqués de Condorcet (1743-1794)⁶ y ha analizado Arrow. Sin embargo, es posible obviar la importancia de esta dificultad si el número de votantes es grande: en ese caso la decisión tenderá a converger en el votante mediano, y llegar a una decisión generalmente aplicable a todos los efectos, como destacó en su día Gordon Tullock (1967). Parecía que podíamos descansar.

El segundo inconveniente es más grave. Como admite Sen (1970, 10.1), la regla de decisión por mayoría deja poco espacio para la libertad personal cual la definió y la valoró J.S. Mill (1859): es posible que lo aceptado e impuesto por mayoría conculque las preferencias funda, minoría a veces compuesta por sólo dos votantes. Dicho de otra forma, es posible que la decisión social se entrometa en la esfera de libertad de las personas. Una sociedad no es liberal si no “desarrolla valores y preferencias que respeten la privacidad y las elecciones personales de cada uno” (Sen, 1970, 6.6). En ese caso, la concurrencia de votantes que señalaba Tullock se reduce otra

vez a dos, mayoría y minoría. Si la sociedad se divide en dos, la imposibilidad relativizada por Tullock vuelve a cobrar relevancia y el teorema de Arrow vuelve a levantar cabeza.

2.2. Tres Formas de Evitar la Imposibilidad

Son tres las posibles reacciones ante el efecto destructor del Teorema de Imposibilidad de Arrow. Una es la de continuar sin desfallecer la tradición de la filosofía política de deducir criterios universales de justicia y felicidad social, tradición que asociamos con nombres como los de Kant, Bentham, Rousseau, o Rawls; esto ha quedado en entredicho tras el descubrimiento de la imposibilidad que estamos analizando. La segunda es la de evitar la imposibilidad discutiendo democráticamente caso por caso las posibles reformas e intervenciones sociales, como propone Sen. La tercera es confiar en las instituciones sociales y reglas generales producto de la evolución histórica o libremente creadas, cuales son la competencia mercantil, el libre comercio o la división de poderes.

Los criterios universales del tipo tradicional caen bajo la guillotina del teorema de imposibilidad. Son principios considerados de perpetua y general aplicación, como el de Kant, que exhorta a tratar las personas siempre como fines y no como instrumentos cual hace el mercado; o como el de Bentham, que propone maximizar la suma de felicidad utilitarista, con lo que discrimina a las minorías; o como las propuestas constitucionales de Rousseau, que concibe la obediencia a la 'voluntad general' el camino necesario hacia el bienestar social; o como la *fairness* de Rawls, quien sostiene la validez universal de ciertas reglas de equidad distributiva; o la igualdad de patrimonios a la Piketty, con la que se pretende evitar la consolidación de la clase explotadora. Pero quede el análisis más detallado tales criterios de justicia y bienestar para otra ocasión, pues merecen un tratamiento aparte por la importancia que han tenido y tienen en la filosofía política.

Sen abandona el camino de definir reglas universales del tipo de las que condenó Arrow y propone el análisis de lo justo y feliz para cada caso. Propone que nos contentemos con alcanzar una justicia intuitiva, tras comparar, por medio de un debate democrático, las condiciones de vida, o las capacidades reales o los 'funcionamientos' como los llama, de que gozan o carecen las distintas personas en su vida cotidiana.⁷ Para Sen no hay nunca soluciones universalmente justas de los problemas sociales, lo que es cierto; pero de ahí salta a



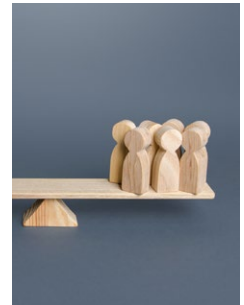
la conclusión de que debemos dejar de lado las reglas institucionales y centrarnos en lo consensuable, una postura consoladora, pero en fin de cuentas corta de vista.

Frente a la propuesta de Sen destaca la de su disconforme rival de siempre Jagdish Bhagwati. Su enfrentamiento sobre la mejor política económica para que la India deje atrás la pobreza salió a la luz pública con motivo de las elecciones generales de 2013 en aquel gran país. Fue un enfrentamiento muy ruidoso entre empiria y teoría, que quedó reflejado en los libros de Amartya Sen con J. Drèze, favorable a las intervenciones parciales, por un lado, y el de J. Bhagwati con A. Panagariya, defensores del libre comercio, por otro.

Es mi opinión que, para evitar las contradicciones lógicas señaladas por Arrow no basta con seguir el camino de Sen de dejar de lado la condición I añadiendo más información al cálculo del bienestar general, cual sería la intensidad de las preferencias en vez de sólo su ordenación. Tampoco escaparemos de la paradoja diciendo que los supuestos de que parte Sen en sus dos ejemplos son irreales, puesto que en cualquier situación social ya habrá reglas que determinen quienes son dueños de la flauta o del libro. De eso se trata precisamente, de establecer el marco institucional previo en el que se mueven nuestros tres niños o nuestros dos lectores y no suponer que es posible dictaminar sobre lo justo o lo feliz de sistemas sociales en abstracto y sin que los individuos, cada uno en su situación concreta, hayan establecido previamente unas reglas constitucionales.

2.3. Planos Lógicos

¿Cómo escapa uno de esos viciosos círculos semánticos que aparecen en los debates de filosofía política y desembocan en el Teorema de Imposibilidad de Arrow? Un modo de evitar la paradoja de Arrow es separando las decisiones sociales en dos planos – como propuso Bertrand Russell para resolver otras paradojas de lógica formal y evitar las autorreferencias que son la fuente de esas paradojas. Dividamos el discurso en dos planos. Es el caso de una paradoja famosa, la del mentiroso de Eubúlides de Mileto, quien afirmó: que “si la proposición «lo que estoy diciendo es falso» es falsa, es que es verdadera; y si es verdadera, es que es falsa”. Russell, digo, usó las comillas para separar la paradoja en dos planos: en un meta-plano colocaremos la expresión «Estoy diciendo» (que es la parte verdadera); y en un plano inferior la proposición «es falso» (que



es la falsía o mentira que dice Eubúlides). Eso permite transformar la contradictoria proposición del sofista en «Es cierto que Eubúlides está diciendo algo falso».

Buchanan y Tullock, en su libro *El cálculo del consentimiento* (1962), cuyo intencionado subtítulo era *Los fundamentos lógicos de la democracia constitucional*, aplicaron la separación de las normas políticas en dos planos: el meta-plano constitucional acordado por unanimidad previamente a cualquier decisión práctica, y el plano político cotidiano gobernado por la regla de la mayoría. Esta distinción permite evitar una autorreferencia semántica en el mundo de las decisiones políticas.

2.4. Ejemplos de Regla Constitucional a la Buchanan-Tullock

Al ser las Constituciones liberales cajones de sastre donde caben normas de distinto tipo, desde reglas de procedimiento universales hasta los principios rectores de la política económica y social, parece imposible que haya normas de unánime aprobación cual las definen nuestros autores.⁸

La unanimidad sobre la que se basan no es la de anónimos sujetos y desconocedores de cuál vaya a ser su situación en la sociedad futura, como supone Rawls, sino que son acuerdos de individuos en su situación real, que calculan la probabilidad de lo que pueda ocurrirles en el futuro. En el caso de la Constitución española de 1978 el acuerdo constitucional unánime recae sobre lo que se denominan derechos y libertades de las personas. En cambio, los principios rectores de la política social y económica y su aplicación caen dentro de lo que para ellos serían decisiones mayoritarias. Por ejemplo, serían principios fundamentales unánimes, la igualdad ante la ley del artículo 14, el *habeas corpus* del artículo 17, o el derecho a la propiedad privada del art. 33, o la libertad de empresa del art. 38, sin tomar ésta *sub conditione*.

2.5. La Regla del Respeto del Derecho de Propiedad Privada

El enfrentamiento de los tres niños se despeja si hay una regla 'constitucional' previa y de mayor rango que determine cómo se adquiere y ejercita la propiedad de los bienes. Si la flauta tiene propietario, éste podrá alquilarla por un precio o incluso ceder el uso del instrumento gratuitamente. Ya no hay paradoja.



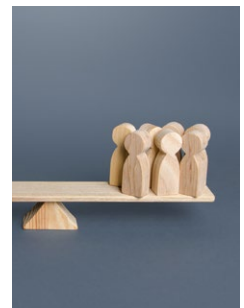
Igualmente se resuelve la paradoja de las soluciones mostrencas del caso de lady Chatterley. Una regla constitucional de respeto de la propiedad privada, establecida y aceptada antes de que nadie sepa de la existencia del disputado libro, permite alcanzar soluciones aceptables por todos los miembros de esa sociedad, aunque puedan parecer subóptimas al filósofo-rey de turno. El respeto de la propiedad privada evita la tentación de aplicar soluciones dictatoriales que teóricamente pudieran llevar el bienestar social a su máximo: ni Leviatán a la Hobbes, ni voluntad general a la Rousseau, ni redistribución a la Piketty. Ello resuelve la paradoja y evita el conflicto, sin necesidad de contorsiones metafísicas, como señaló santo Tomás de Aquino en su defensa de la propiedad privada.

«quia per hoc magis pacificus status hominum conservatur, dum unusquisque re sua contentus est. Unde videmus quod inter eos qui communiter et ex indiviso aliquid possident, frequentius iurgia oriuntur».⁹

Supongamos que don Libertino haya comprado ese incitante libro en uno de los *bouquinistes* de los *Quais de la Seine* en París. Don Puritano no podrá imponerle su preferencia de que no lo lea, por mucho que un análisis abstracto y anterior de la situación social nos lleve a concluir que el 'bienestar' podría ser mayor si la decisión fuese colectiva y dictatorial, no mercantil. Don Puritano, que vive en una sociedad constitucionalmente respetuosa del derecho de propiedad privada, puede intentar comprarle el libro intonso a don Libertino. Si es don Puritano el que consiguió el libro a la orilla del Sena, entonces don Libertino tendrá que refrenar sus inclinaciones y quedarse sin conseguir una situación social que él (o el filósofo-rey) considere 'superior'.

La solución de la paradoja descansa así en la norma constitucional de que haya propietarios y de que ambas partes respeten los derechos de propiedad. El límite de la propia libertad no es la libertad de los demás (un espacio que no tiene fronteras precisas), sino la *propiedad* de los demás.

En el propio mercado emergen instituciones y reglas que resuelven las paradojas que se plantearían en una sociedad ideal carente de instituciones. Se llega a soluciones socialmente aceptables sin necesidad de que, a la Sen, cada caso se juzgue por sí mismo. Al fijar la atención en si cada transacción singular mejora el bienestar social o las capacidades de los miembros de una sociedad, nuestros intervencionistas pasan por alto los positivos efectos de las clásicas



instituciones del libre mercado, en el que se anudan numerosos acuerdos unánimes *nemine discrepante* (o contratos que sólo conciernen a las dos partes que los alcanzan).¹⁰ A lo largo de la historia han emergido convenientes instituciones generales, como es la del respeto de la propiedad privada. También hay casos en los que las instituciones han sido creadas *ex professo*, por así decir, para evitar paradojas. Eso hicieron los padres de la Constitución de los EE. UU. de 1785, con la institución de *checks and balances*, con el fin de superar las contradicciones de los sistemas democráticos y evitar de esa forma un posible suicidio de la democracia por decisión democrática.

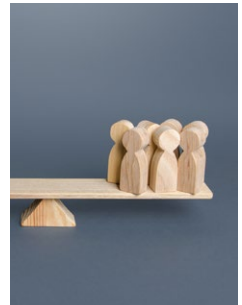
La general detestación del libre mercado y de la libre contratación conduce al aumento artificial de conflictos cuya solución se hace política, como ocurre en el mercado laboral español, por ejemplo. El plantearse continuamente si los resultados de la sociedad mercantil son equitativos o preguntarse si cada uno de los contratos realizados promueve el bienestar social es una actitud típica de filósofo-rey. So pretexto de ser ‘justos y benéficos’, estos *dei ex macchina* intervienen donde nadie les ha llamado. Arrojan un torrente de dudas sobre el mercado libre, ese mercado que, al tiempo que ha llevado a un notable crecimiento del número de habitantes en nuestra Tierra, ha creado una prosperidad y una igualdad sin precedentes en la historia. Calcula, en efecto, la economista Deirdre McCloskey (2022, cap. 6) que la humanidad ha conseguido un aumento del ingreso social de un 5.000% en los últimos doscientos años. El filósofo igualitario Branco Milanovic, en su artículo titulado “La gran convergencia” (2023), muestra la existencia de una clara reducción de la desigualdad mundial a partir de 1990. Los adoradores de la competencia perfecta no ven que las normas constitucionales y consuetudinarias liberales han sido la base de los increíbles progresos de la civilización occidental en prosperidad, en igualdad, y en libertad. Esos filósofos harían bien en reconsiderar su confusión entre justicia y uniformidad, y ceñirse a la definición clásica de justicia recogida por Ulpiano:

Suum cuique tribuere, alterum non laedere, honeste vivere.



REFERENCIAS

- Arrow, Kenneth (19651): "A difficulty in the Concept of Social Welfare", *Journal of Political Economy*, nº. 58, pgs. 328-346.
- J. Bhagwati y A. Panagariya (2013), *Why Growth Matters. How economic growth in India reduced poverty and the lessons for other developing countries*. Public Affairs.
- Buchanan, J. y Tullock, G. (1962): *The Calculus of Consent. Logical Foundations of Constitutional Democracy*. Oxford University Press.
- Drèze, J., y A. Sen (2013): *Uncertain Glory. India and its Contradictions*. Princeton University Press.
- Francisco Álvarez, J. (2010): "La propuesta inmanentista de Amartya Sen para la justicia global". *Isegoría*, nº 43, julio-diciembre, págs. 617-630.
- Lawrence, D. H.: *Lady Chatterley's Lover* (1928), publicado privadamente en 1928 y públicamente por Penguin Books en 1960.
- Maskin, E. y Sen, A. (2004):, Eric and Sen, Amartya (2004): *The Arrow impossibility Problem*. Kenneth J. Arrow Lecture Series. Columbia University Press. Kiddle edition.
- McCloskey N. (2022): *Beyond Positivism, Behaviorism, and Neoinstitutionalism in Economics*. University of Chicago Press.
- Milanovic, B. (2023): "The Great Convergence", *Foreign Affairs*, July-August 2023, págs. 78-91, Gráfico 1.
- Mill, J.S. (1859): *On Liberty. Vol. XVIII of the Collected Works of -*. University of Toronto Press.
- Nasar, S. (1994): *A Beautiful Mind* (Biografía de John Nash). Simon and Schuster, New York.
- Sen, A. (1970): *Collective Choice and Social Welfare*. Oliver and Boyd.
- Sen, A. (1983): "The Impossibility of a Paretian Liberal". *Journal of Political Economy* 78 (1) Traducido en J. Casas compilador, *La nueva economía del bienestar*, 1995.
- Sen, A. (2003): *The Idea of Justice*. Penguin Books.
- Sen, A. (2021): *Home in the World. A Memoir*. Allen Lane.
- Sen, A. (2014): "Arrow and the Impossibility Theorem", en Maskin y Sen.
- Tullock, G. (1967): "The General Irrelevance of the Impossibility Theorem", *Quarterly Journal of Economics*, vol. 81, nr. 2, pgs. 256-270.
- Vallet de Goytisolo, J. (1974): "La propiedad en Santo Tomás de Aquino", nota 70. Revista *Verbo*. Fundación S. Peiró.
- Vanberg, V. J. (2019): *Individual Choice and Social Welfare: Theoretical Foundations of Political Economy*. A Research Literature Review. Edward Elgar. Cheltenham.



NOTAS

1. Versión revisada de la ponencia leída por el autor en la Real Academia de Ciencias Morales y Políticas el 23 de mayo de 2023.
2. Amartya Sen: *The Idea of Justice* (2009), págs. 12-13. Es éste sin duda uno de sus libros más relevantes para el estudio que estamos realizando. Cabría añadir su autobiografía *Home in the World* (2021), el retrato de un pensador sin duda movido por el amor a la ciencia y la preocupación por los menos afortunados. El libro que estudié durante el curso 1972-73 del Prof. Sen en la London School of Economics en fue *Collective Choice and Social Welfare* (1970).
3. Traducido en J. Casas compilador, *La nueva economía del bienestar*, 1995.
4. Sylvia Nasar (1998): *Biografía de John Nash*, , pg. 108.
5. Una demostración lógico-matemática de este resultado se encuentra en el trabajo del propio Sen: "Arrow and the Impossibility Theorem", en Maskin y Sen, Universidad de Columbia (2014). En el Apéndice 2 del presente artículo presentamos una reformulación de la prueba de tal cuestión.

- 6. Véase el Apéndice 1.
- 7. Esto es lo que J. Francisco Álvarez (2010) llama "propuesta inmanentista de Sen para la justicia global".
- 8. Viktor Vanberg (2019) presenta un luminoso contraste entre la teoría Constitucional del Bienestar y las teorías utilitarista y preferencial del Bienestar.
- 9. "...porque por ello los hombres conservan un estatus pacífico, mientras cada uno esté contento con lo que tiene; como entre los dueños de propiedades indivisas vemos que nacen frecuentes enfrentamientos." Juan Vallet de Goytisolo (1974): "La propiedad en santo Tomás de Aquino" nota 70.
- 10. Claro está, nuestros intervencionistas no se cansan de señalar imperfecciones del mercado por las que los libres contratos deben ser examinados y regulados, dada su tendencia a alejarse del equilibrio de competencia perfecta. McCloskey (2022, págs. 37-40) ofrece inconformes reflexiones sobre la lista de 108 imperfecciones que extrae de los escritos de economistas ortodoxos.
- 11. Adaptado de "Theorem" in Maskin, Eric y Sen, Amartya (2004).
- 12. En su clase el Prof. Sen también usaba el ejemplo de preferir poner la barba encima o debajo del embozo. Esto enfatiza que se trata de libres decisiones individuales.

APÉNDICES

APÉNDICE 1

La paradoja del voto mayoritario según el marqués de Condorcet

Supongamos una sociedad de tres miembros que expresan las siguientes preferencias de organización social, a decidir por mayoría.

	PRIMERA PREFERENCIA	SEGUNDA PREFERENCIA	TERCERA PREFERENCIA
Votante 1	A	B	C
Votante 2	B	C	A
Votante 3	C	A	B

La *mayoría* de los votantes prefiere A a B, y B a C, pero también C a A. El resultado es cíclico y sin resolución final. {A > B < C < A}. El ciclo tiende a desaparecer con el aumento del número de votantes (G. Tullock, 1967)

APÉNDICE 2

La demostración por Amartya Sen del teorema de imposibilidad de Arrow, reformulada por PSG¹¹

Adaptado de "Theorem" in Maskin, Eric y Sen, Amartya (2004).

Demostración de que una función social de bienestar (FB) que satisfaga unas condiciones mínimamente exigentes de:

- 1. un dominio no restringido (U), es decir, carácter universal;
- 2. la independencia de ésta respecto de otras FBs (I); y
- 3. el principio de Pareto (P) de que los individuos concernidos no querrán cambiar de situación, que es la menos mala de aquellas con las que se enfrentan;

– tiene que ser una dictadura (D).

Demostrar que: {U +P+} -> D

La demostración concierne las preferencias individuales respecto de estados sociales alternativos, es decir, la aprobación de un estado social, no la satisfacción personal con todo lo que no posee o recibe por vivir en él.



De la condición de 2, o 1 (independencia respecto de otros criterios de preferencia), se excluye que esta FB tome en cuenta otras posibles informaciones, como las intensidades de las preferencias individuales o las comparaciones interpersonales. Al concentrar la atención en las preferencias sociales simplifica la formulación de la FB aún más y la hace menos exigente (e inesperadamente imposible). Ya Condorcet (1743-1794) había analizado situaciones en las que las decisiones mayoritarias eran contradictorias. Ahora Arrow generalizaba este resultado para todas las decisiones sociales.

La demostración busca mostrar la imposibilidad de proponer decisiones mayoritarias sobre al menos cuatro situaciones sociales (a, x, y, b), sometida a las condiciones mínimas detalladas al principio, y que sin embargo inevitablemente caen en la contradicción de ser individualistas al tiempo que no pueden evitar el someterse a un dictador.

Grupo decisor

Supongamos que en esa sociedad hay por lo menos cuatro posibles estados distintos (a, b, x, y) y un número finito de individuos. En esa sociedad hay un *grupo G* que tiene la facultad de decidir sin que nadie pueda oponerse que ellos duerman a ello, un comportamiento como es el de dormir con un escandaloso pijama de color rosa con una palmera bordada en la espalda ($x > y$).¹² En cualquier situación social de la que forma parte, ese *Grupo G* tiene la facultad de decidir, ejerciendo su libertad individual sin que nadie pueda oponerse, qué ropa ellos se ponen para dormir. Esa decisión es intocable por el resto de la sociedad. Por lo que se refiere a la sociedad en su conjunto, nadie sabe qué atuendo nocturno preferirán elegir para todos. Únicamente sabemos que la sociedad debe respetar la preferencia minoritaria del *Grupo G*.

La sociedad en su conjunto debe elegir entre a, x, b, y . Nadie sabe si los *no-G* preferirán a más que b o viceversa; pero sí sabemos que los *G* dictan a la sociedad la preferencia respecto de algo mínimo, el color y adorno del pijama de ellos ($x > y$). La preferencia del *Grupo G* por ponerse pijamas de color rosa con palmera no conculca para el conjunto de los estados sociales las condiciones mínimas $P, I, y U$ definidas por Arrow. Supongamos que las preferencias de la sociedad en su conjunto sean ($a > b$). No olvidemos el privilegio del *Grupo G*. Su preferencia por el estado social x mejor que y es parte intocable del total de las preferencias de la sociedad. La definición de los estados sociales elegibles incluye el que ese *grupo G* goce de la facultad de decidir su atuendo nocturno digan lo que digan los demás. Ahora liguemos los dos postulados: la preferencia general de toda la sociedad por a mejor que b ; y la preferencia particular de este *grupo G* decisor de x mejor que y . La conclusión es que el orden de preferencia de ese *grupo G* es ($a > x > y > b$). Por transitividad estricta este orden ha de aplicarse a toda la sociedad. El núcleo de estas preferencias ($x > y$) gobierna pues la serie *completa*. Por tanto, el *grupo G* es decisivo respecto de las cuatro elecciones y de aplicación universal (U) a todos los habitantes, que en todo caso no querrán abandonar su situación óptimo-paretiana (P).

Reducción paulatina de los grupos decisivos

Si el *grupo G* es decisivo, habrá una pequeña parte del mismo que sea decisiva. Dividamos el *grupo G*, pues, en dos subgrupos: el *Grupo G1*, que es decisivo, y el *Grupo G2*, que no lo es. Pongamos que el *minigrupo G1* prefiere a mejor que b (pijama rosa con palmera mejor que cualquier otro atuendo nocturno). Por lo tanto, $G1$ es decisivo para toda la sociedad (U). Lo mismo ocurre con un subgrupo menor $G3$. La decidibilidad se desliza hasta que el G^* comprenda un solo individuo, es decir, un dictador. *Quod erat demonstrandum*.

